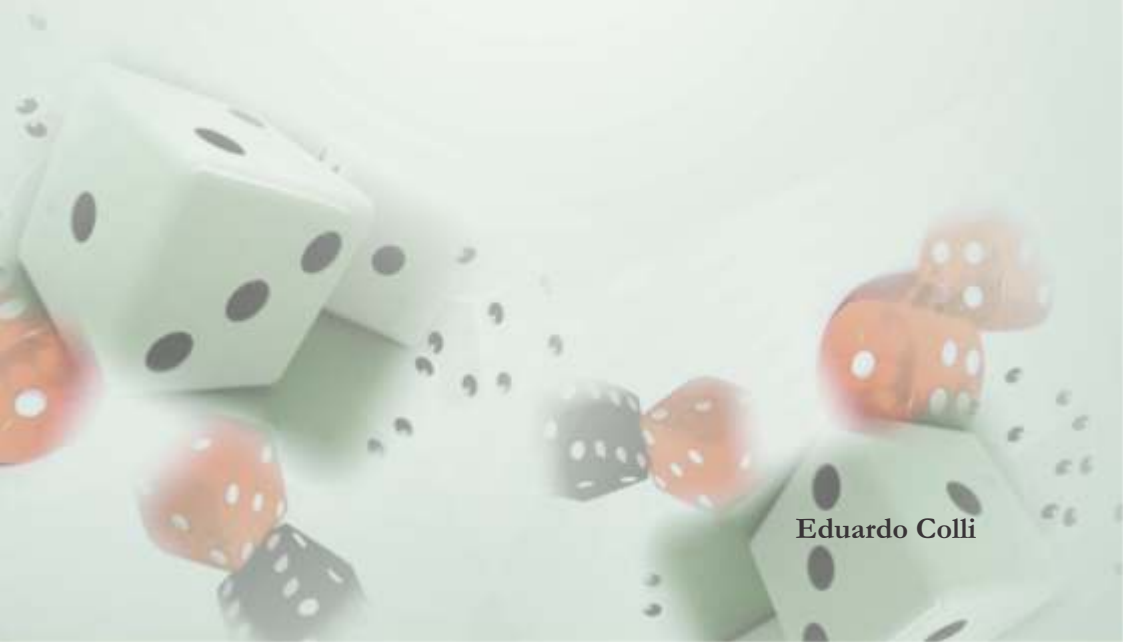




AS CERTEZAS DO ACASO



Eduardo Colli





Eduardo Colli



A MATEMÁTICA

A Matemática é vista por muitos como uma obrigação escolar, mas é bem mais do que isso: ela é uma ciência viva, em franco desenvolvimento, e, ao mesmo tempo, a ferramenta, de fato a linguagem de várias outras ciências, sobretudo da Física e da Engenharia.

Dentre as ciências, a Matemática tem a peculiaridade de ser única em sua estrutura de dedução formal, onde cada nova demonstração ou descoberta se vale de fatos já demonstrados com rigor. Todo esse edifício se apoia sobre poucas afirmações aceitas universalmente, de modo que todo fato matemático demonstrado não perde sua validade. Na Matemática, teorias distintas não são visões diferentes sobre o mesmo assunto, são apenas divisões do conhecimento em interesses diferentes.

Engana-se quem pensa que a Matemática é um corpo de conhecimento que não evolui mais, e que tudo de relevante que poderia ser descoberto já o foi. Ainda há inúmeras perguntas não respondidas, mas não apenas isso, novas áreas sendo criadas a partir das novas descobertas. Para se ter uma ideia, atualmente, na área de Matemática, são publicados cerca de 100 mil artigos científicos por ano! É importante lembrar que um artigo científico necessariamente traz fatos inéditos, que, na maioria das vezes, são demonstrações de teoremas.

A Matemática dita “pura” não está aí apenas para o deleite de um grupo de curiosos, com interesses descolados da realidade. Várias áreas da Matemática nasceram de motivações reais e práticas, e são efetivamente usadas. Depois, essas áreas evoluíram também a partir de suas motivações internas, que mais tarde se reverteram em aplicações inesperadas. Mais ainda, olhando de forma mais ampla, a Matemática abarca também disciplinas constantemente vinculadas a problemas práticos: a Computação, nos seus aspectos lógicos e no desenvolvimento de algoritmos; a Análise Numérica, que trabalha sobre a obtenção computacional de soluções aproximadas para problemas que não podem ser resolvidos de outra forma; e a Estatística, que usa a teoria de probabilidades para criar ferramentas que permitam obter modelos a partir de dados reais.

Uma das maiores contribuições de Galileu foi dar caráter quantitativo às ciências da natureza, à “filosofia natural”, como eram chamadas na sua época. Ele afirmou: “A filosofia está escrita neste grande livro - o universo - que permanece sempre aberto a nossa vista, mas não podemos compreendê-la sem aprender primeiro a linguagem em que está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática ...” À parte a motivação científica, a Matemática está presente na vida das pessoas, no trabalho ou no âmbito pessoal. Nas finanças, nos aspectos geométricos que surgem em variadas situações do cotidiano, nas representações gráficas, nas estatísticas. A Matemática é também linguagem e, por isso, é tratada com tanta importância na escola básica.

Não há dúvida de que a Matemática continuará a ser relevante para o ser humano, e de formas cada vez mais surpreendentes. Estejamos prontos para isto!



ÍNDICE

	Páginas
As certezas do acaso.....	01
O lançamento de um dado.....	02
Jogando dois dados.....	02
Cara ou coroa, honesto e desonesto.....	03
Cara e coroa honesto em 10 rodadas.....	04
Cara e coroa desonesto.....	06
O trajeto do bêbado.....	06
As coincidências de aniversários.....	08
Disputa entre dados.....	09
O sorteio do amigo secreto.....	10
O que há dentro dos chocalhos?.....	11
Experimentos.....	13
EXPERIMENTO 1	14
EXPERIMENTO 2	17
EXPERIMENTO 3	18
EXPERIMENTO 4	19
EXPERIMENTO 5	22
EXPERIMENTO 6	25
EXPERIMENTO 7	26
EXPERIMENTO 8	27
EXPERIMENTO 9	29
EXPERIMENTO 10.....	29
EXPERIMENTO 11	30



As certezas do acaso

A matemática das probabilidades nasceu para ajudar os apostadores em “jogos de azar”. Foi desenvolvida na segunda metade do século XVII, por Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Christian Huygens, Jakob Bernoulli e Abraham de Moivre, depois do trabalho pioneiro de Girolamo Cardano, no século XVI. No início do século XVIII, já era um ramo da matemática, assim como a geometria, a álgebra e o cálculo. Foi uma época de grande efervescência na física, na matemática e na astronomia.

A teoria das probabilidades sofreu, no início, com sua associação aos jogos e apostas. Era uma motivação pouco nobre e contradizia as superstições dos jogadores. Hoje em dia é impossível pensar na ciência sem ela. Embora lide com o acaso, é a base da solidez financeira das companhias de seguros.

É importante entender que a teoria matemática das probabilidades é um modelo inspirado em fenômenos do mundo real. Como ramo da matemática, sua consistência não pode ser contestada, uma vez bem estabelecida. Já seu uso prático pode ou não estar de acordo com a situação à qual procuramos aplicá-la. Nesse sentido, não devemos confundi-la com a área da ciência chamada estatística, que aplica a teoria das probabilidades a dados numéricos do mundo real, levando a previsões sobre eventos futuros, que podem não ser verificadas se os dados ou hipóteses empregadas não forem corretos.



G. Gardano



P. de Fermat



B. Pascal



C. Huygens



Jakob Bernoulli



A. de Moivre

O lançamento de um dado

Nossa primeira discussão será em torno do dado simples, em forma de cubo, com faces numeradas de 1 a 6. Supomos que o dado é totalmente homogêneo e simétrico, em particular não conseguimos distinguir uma face da outra, a não ser por sua numeração.



O que torna o lançamento de um dado aquilo que se chama um “processo aleatório” é o fato de que não temos um controle exato sobre como fazemos os lançamentos, e pequenas modificações na forma como jogamos já são suficientes para produzir resultados distintos. Desta forma, a modelagem mais simples e prática do lançamento de um dado é dizer que todas as faces têm iguais “chances” de terminarem viradas para cima. Como são seis faces, cada uma tem probabilidade de $\frac{1}{6}$.

Um dado pode, assim, ser usado como um simulador de lançamento de uma moeda, bastando dizer que saiu ‘cara’ quando o dado apresentou um número entre 1 e 3 (cuja probabilidade é $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$). Ou ainda que “cara” corresponde aos números ímpares 1, 3, e 5 e “coroa” aos pares 2, 4 e 6.

Jogando dois dados

Passemos ao lançamentos de dois dados. Temos agora muito mais possibilidades de ocorrências. Podemos ter pares de resultados iguais, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 e 6-6, e pares de resultados diferentes, como 1-2, 4-6, etc. Uma dúvida pertinente é se devemos considerar 2-5 e 5-2, digamos, como resultados diferentes.



A pergunta pode admitir duas respostas. É interessante que o esclarecimento dessa questão apareceu um século antes do período de nascimento da teoria das probabilidades, no trabalho de Girolamo Cardano intitulado “Livro sobre Jogos de Azar”, que foi publicado em 1526.

De fato, ao jogarmos os dados e não os distinguirmos um do outro, apenas podemos citar o resultado como um par sem ordenamento. Não há diferença entre 2-5 e 5-2, porque em ambos os casos o 2 e o 5 saíram. Se, diferentemente, jogássemos cada dado em uma mesa distinta, aí sim poderíamos dizer que há uma diferença entre 2-5 e 5-2, porque estaríamos distinguindo um dado do outro, por exemplo dizendo “o dado da esquerda e o dado da direita”. Se não considerarmos o ordenamento, são 21 possibilidades; se considerarmos, são 36 pares possíveis.

A questão mais delicada é se a probabilidade de cada um dos pares não ordenados pode ser considerada igual a cada uma das outras. Mais especificamente, os eventos com dados iguais (por exemplo, 5-5) têm mesma probabilidade do que os eventos com dados diferentes (por exemplo, 2-5)?

A proposta do kit é fazer um experimento para testar essa hipótese. Se assim fosse, teríamos 6 resultados de números iguais e 15 resultados de dados diferentes, portanto $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ de chance de dar dois dados iguais e $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ de chance de dar dois dados diferentes. Esperar-se-ia, então, que ocorrências com dois dados diferentes ocorressem 2,5 mais vezes do que ocorrências com dois dados iguais.

No entanto, pensando em pares ordenados, (5,5), (2,5) e (5,2) teriam, cada um, iguais chances, o que implicaria que 2-5 (sem ordenação) tem duas vezes mais chances de ocorrer do que 5-5. Existem 36 pares ordenados (n, m) , pois são seis possibilidades para n e seis possibilidades para m , sendo 30 deles com valores diferentes de n e m e 6 deles com valores iguais a n e m . Então, de acordo com esse modelo a probabilidade de obter valores iguais deveria ser de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ e a probabilidade de obter valores diferentes deveria ser de $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Espera-se, então, que ocorrências com dois dados diferentes aconteçam 5 mais vezes do que ocorrências com dois dados iguais. O resultado experimental deve confirmar esse segundo modelo, que foi a proposta de Cardano em seu livro precursor.

Cara ou coroa, honesto e desonesto

Já vimos anteriormente que o lançamento de um dado simples pode servir como um simulador de cara e coroa, bastando associar três números a cara e os outros três números a coroa. Mas há várias outras formas de simulação: pode-se pegar qualquer dos dados em forma de poliedro do kit e associar metade dos números a cara e a outra metade a coroa (todos eles têm um número par de lados).

O icosaedro parece ser o melhor para isso, pois é o que rola com mais facilidade.

Por outro lado, essa forma de simular cara e coroa tem a vantagem de permitir que também criemos jogos de cara e coroa desonestos, atribuindo probabilidades diferentes para um e para outro, digamos p e $1 - p$. Por exemplo, se, no lançamento de um dado simples, decidirmos atribuir cara para os números 1 e 2 e coroa para os números 3, 4, 5 e 6, então teremos $p = \frac{1}{3}$ de chance de obter cara e $1 - p = \frac{2}{3}$ de chance de obter coroa. Com todos esses dados do kit é possível bolar vários jogos de cara e coroa com valores bastante variados de p .

Cara ou coroa honesto em 10 rodadas

O que esperar de um lançamento de 10 moedas (ou simuladores de moeda) ao mesmo tempo? Quantas caras e quantas coroas devemos esperar? Com que probabilidade ocorrerão 4 caras e 6 coroas? Ou 8 caras e 2 coroas?



Se ordenarmos, em pensamento, as 10 moedas, veremos que há duas saídas possíveis para a primeira (cara ou coroa), e para cada uma dessas duas há duas saídas possíveis para a segunda, e para cada possibilidade das duas primeiras há duas saídas possíveis para a terceira, e assim por diante. Então são $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$ (10 vezes) possibilidades, isto é, $2^{10} = 1024$ possibilidades de saídas de cara e coroa para essas 10 moedas.

Agora queremos saber quantas dessas possibilidades apresentam exatamente 4 caras e 6 coroas. É como se olhássemos para as 10 moedas e escolhêssemos 4 delas para serem caras (e as demais para serem coroas). Ou seja, queremos saber de quantas maneiras podemos escolher 4 moedas em 10. Esse é um problema clássico da contagem. A resposta é o número $C_{10,4}$, um número que comumente é referenciado como “combinação de 10 elementos 4 a 4”, e que vale $\frac{10!}{4!6!}$, em que ‘ $n!$ ’ representa o fatorial do número n , isto é, o produto $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Portanto

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

Num dos experimentos do kit, pede-se um histograma da frequência de rodadas de 10 lançamentos em que saíram 0 caras, 1 cara, 2 caras, etc, 9 caras, 10 caras, com o objetivo de comparar com a probabilidade de cada um desses eventos. A probabilidade de saírem 4 caras (exatamente) é o número de maneiras de saírem exatamente 4 caras ($C_{10,4}$, como vimos acima) dividido pelo número total de possibilidades de 10 lançamentos (2^{10} , como também vimos acima). Então o histograma esperado terá os valores

$$C_{10,0} - C_{10,1} - C_{10,2} - \cdots - C_{10,10}$$

divididos por 2^{10} . É uma bonita propriedade das combinações que essas linhas contendo os números $C_{n,m}$, com m variando de 0 até n , podem ser obtidas com a montagem do famoso Triângulo de Pascal:

[illegible]

Completando a tabela nas linhas seguintes, a linha $n = 10$ tem os números

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Divida por $2^{10} = 1024$ cada um deles e arredonde na quinta casa decimal, e depois construa o histograma com esses valores (ver experimento 5 do roteiro).

Cara e coroa desonesto

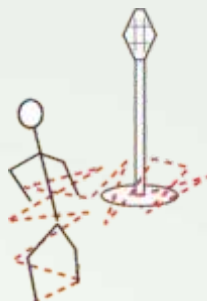
Agora consideraremos um jogo de cara e coroa desonesto, em que cara tem probabilidade de $1/3$ e coroa tem probabilidade de $2/3$. Isso se consegue com um dado simples, associando-se os resultados 1 e 2 a cara e os resultados 3, 4, 5 e 6 a coroa. Se o jogo fosse honesto, uma rodada fixada de 3 lançamentos, digamos coroa-cara-coroa, teria chance $1/8$ de ocorrer. Mas sendo um jogo desonesto com essas probabilidades que fixamos, e cada lançamento sendo independente do outro, usamos o princípio multiplicativo e vemos que o resultado é outro: coroa-cara-coroa tem chance de $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$ de ocorrer. Na verdade, todas as rodadas de 3 jogadas, em que aparece exatamente 1 cara, têm a mesma chance igual a $\frac{4}{27}$ de ocorrer. Portanto, a chance de ocorrer 1 cara em 3 jogadas é a soma de todas essas chances, que é $3 \cdot \frac{4}{27}$, o "3" aparecendo porque há 3 formas de uma rodada apresentar exatamente 1 cara: cara-coroa-coroa, coroa-cara-coroa, coroa-coroa-cara. O "3" é o $C_{3,1}$ do Triângulo de Pascal, como vimos na seção anterior.

De forma geral, a probabilidade de m caras em n lançamentos será o produto de $\left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$, que é a probabilidade de cada rodada em que aparecem exatamente m caras (de probabilidade $\frac{1}{3}$) e $n - m$ coroas (de probabilidade $\frac{2}{3}$), com o número de situações possíveis em que aparecem m caras em n lançamentos, que é $C_{n,m}$. Então essa probabilidade é igual a

$$\left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

O trajeto do bêbado

Um dos famosos trabalhos de Albert Einstein em 1905, quando publicou a Teoria da Relatividade Restrita, foi a modelagem do chamado movimento browniano. O botânico Robert Brown havia observado muitos anos antes, em 1827, que pequenas partículas de pólen na superfície de um líquido tinham um movimento errático. O que Einstein fez foi criar um modelo matemático descrevendo um movimento errático, baseado em decisões aleatórias. A analogia é com o trajeto de um bêbado que a cada passo escolhe ao acaso a direção do passo seguinte. Isso pode fazê-lo voltar várias vezes ao ponto de partida, ou afastá-lo gradualmente.



Vamos tratar do caso unidimensional, deixando o caso bidimensional para a brincadeira com o tabuleiro que vem no kit. No caso unidimensional, o bêbado anda sobre os números inteiros:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots,$$

tendo 0 como ponto de partida. Para simular a aleatoriedade da decisão do bêbado sobre para onde ir em cada local onde se encontra, vamos usar um jogo de cara e coroa honesto, onde cara implicará em dar um passo à esquerda (isto é, subtrair uma unidade da posição) e coroa implicará em dar um passo à direita (isto é, somar uma unidade à posição).

A primeira pergunta que se faz neste contexto é: após n passos, qual é a chance de que o bêbado esteja na casa K ? Aqui, K denota um número inteiro. É evidente que não há chance nenhuma de que o bêbado esteja em qualquer casa $K < -n$ ou $K > n$, pois n passos não são suficientes para ir tão longe. Mas existe uma chance de estar na casa $-n$: basta que todos os n sorteios de cara ou coroa tenham dado cara. E sabemos qual é a chance de isso ocorrer: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Mesma coisa se dá com a chance de ele estar na casa $+n$.

Agora perceba que a posição do bêbado após n passos só depende do número de caras e coroas nesses n sorteios, mas não da ordem em que eles ocorreram. Se foram m caras e $n - m$ coroas, para aproveitar nossa notação anterior, então o bêbado andou m passos para a esquerda e $n - m$ passos para a direita, estando, portanto, na posição $K = n - 2m$. Então a chance de estar na posição $n - 2m$ após n passos é a mesma chance de tirar m caras em n jogadas de um jogo de cara e coroa honesto. Daí fica claro também que a posição final do bêbado é um número que tem a mesma paridade que n . Se n é par então a posição final não pode ser uma casa ímpar; e vice-versa, se n é ímpar, então a posição final não pode ser uma casa par.

As coincidências de aniversários

É razoavelmente popular a informação de que, num grupo de 23 pessoas escolhidas ao acaso, a chance de que duas delas façam aniversário no mesmo dia é um pouquinho maior do que 50%. Isso costuma surpreender muita gente, pois é fácil encontrar agrupamentos com no mínimo esse tamanho, por exemplo, num campo de futebol (11 jogadores de cada lado e o juiz), ou numa classe escolar. Surpreende também porque o ano tem 365 dias (vamos ignorar bissextos) e, em geral, uma pessoa pensa na probabilidade de que alguém faça aniversário no mesmo dia que ela, que é $1/365$, um valor muito menor.

Mas, nesse problema, não se fixa o dia em que se dará a repetição, apenas pede-se que duas pessoas façam aniversário no mesmo dia, seja lá qual for esse dia. Além disso, pouco mais de 50% de chance de dois fazerem aniversário no mesmo dia também é pouco menos de 50% de chance de não haver duas pessoas fazendo aniversário no mesmo dia. Então não espere que, com certeza, isso aconteça na sua turma. Experimente, no entanto, ver se isso não acontece em outras turmas da sua escola!

Vamos entender como se calcula essa probabilidade, supondo que o ano sempre tem 365 dias. Aqui a experiência mostra ser mais fácil calcular a probabilidade de não haver duas pessoas que aniversariam no mesmo dia. Ordenamos as pessoas e contamos de quantas formas elas podem fazer aniversário *sem repetição de datas*, e depois dividimos pelo número total de possibilidades. Sendo 23 pessoas, cada uma tem 365 dias para fazer aniversário, logo temos 365^{23} possibilidades de distribuir datas de aniversário entre essas 23 pessoas. Agora vejamos quantas são as possibilidades, dentre essas, em que elas não repetem datas de aniversários entre si. A começar pela primeira, ela pode fazer aniversário em qualquer dia, ou seja, tem 365 possibilidades. A segunda não pode fazer no mesmo dia que a primeira, então para cada data de aniversário da primeira ela tem 364 datas disponíveis. A terceira tem 363 datas para cada escolha de datas da primeira e da segunda. E assim por diante.

Então são $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - 23 + 1)$ possibilidades de distribuição de datas de aniversário entre 23 pessoas, sem repetições entre si. Portanto a probabilidade disso acontecer é de

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - 23 + 1)}{365^{23}}$$

Esse não é um número fácil de calcular, porque os números são muito grandes para as calculadoras, mas pode-se escrevê-lo assim:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365}$$

que resulta em 0,4927... Isto quer dizer que a probabilidade de não haver repetição de aniversários é aproximadamente 0,49, logo a probabilidade de haver repetições é aproximadamente 0,51, isto é, 51%.

Disputa entre dados

Vamos discutir agora as disputas entre dois dados, ou as disputas entre dois conjuntos de dados. Fulano e Sicrano têm, cada um, um ou mais dados numerados, e cada rodada consiste em os dois jogarem seus dados sobre a mesa. Ganha a rodada aquele que somar o número maior entre seus dados. A pergunta, evidentemente, se refere a quem tem mais probabilidade de ganhar uma rodada, com os dados que tem. Aqui, um conjunto de dados é melhor do que outro se, ao jogar com esse outro, tem mais probabilidade de ganhar uma rodada.

O kit apresenta alguns dados de 6 faces com numeração diferente da usual. Em cada um deles, os números de faces opostas são iguais, de forma que cada dado apresenta apenas 3 números possíveis, distintos entre si.

Pergunta-se quem é o melhor: o dado **A** (com números 2 - 4 - 9), o dado **B** (1 - 6 - 8) ou o dado **C** (3 - 5 - 7)? **A** decisão entre quem é melhor entre dois dados se dá por comparação entre o número de maneiras que um pode ganhar e que o outro pode ganhar.

Vejamos por que o dado **A** é melhor do que o dado **B**. **A** tabela abaixo mostra as 9 possibilidades de uma rodada entre **A** e **B**, em quais ganha **A** e em quais ganha **B**. Das nove, cinco são vantajosas para **A** e quatro são vantajosas para **B**.

	B		
	1	6	8
A	2	A	B
	4	A	B
	9	A	A

Portanto a chance de o dado **A** ganhar é de 5/9, e a de **B** ganhar é de 4/9. Sugerimos ao leitor verificar, da mesma forma, que **B** é mais vantajoso do que **C**.

Nossa intuição traiçoeira nos faria concluir, sem fazer mais nenhuma conta, que **A** ganha de **C**. Isso porque nos acostumamos a raciocinar de forma transitiva: se **A** é mais vantajoso do que **B**, e se **B** é mais vantajoso do que **C**, então **A** deveria ser mais vantajoso do que **C**. Mas nem nesses dados nem na vida real isso é sempre verdade. Se montarmos a tabela no caso **A** contra **C** veremos que **C** é mais vantajoso que **A**, formando-se o ciclo

$$A > B > C > A$$

Isto também pode ser entendido do seguinte modo: nenhum dado é melhor do que os outros dois, como na brincadeira de papel-pedra-tesoura, o famoso joquempô.

Agora vem o mais curioso: suponhamos que se jogue **A+A** com **B+B**. Isto é, joga-se a soma de dois dados iguais a **A** contra a soma de dois dados iguais a **B**. Neste caso a relação se inverte: **A+A < B+B**. De fato, todo o ciclo se inverte: **A+A < B+B < C+C < A+A**. Esquisito, não? Convidamos o leitor a mostrar por que isso vale. Para cada par de dados (são três pares para comparar), será preciso montar tabelas com todas as possíveis saídas de um par contra todas as possíveis saídas do outro par. Para cada combinação de resultados, ver quem ganha. No final, contar quem ganha em mais combinações.

O sorteio do amigo secreto

Sete cores fixas são as sete pessoas que vão sortear o amigo secreto ou amigo oculto, depende da região. Sete bolas dessas mesmas cores, soltas, são os “papeizinhos” do sorteio. Quando as bolas soltas retornam elas representam os papeizinhos sorteados por cada um. Ninguém pode tirar a si mesmo, essa é a regra número 1 do amigo secreto. Qual é a chance de isso não ocorrer? Se o número de amigos aumenta, o que ocorre com essa chance? Fica cada vez maior ou cada vez menor?



A resposta para esse problema não é óbvia. A chance de dar certo um sorteio de amigo secreto de n amigos (com ≥ 2) é

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Quanto maior n , esse número tende a ser igual ao inverso do número e :

$\frac{1}{e} = 0,367879 \dots$ Nessa fórmula, $(-1)^n$ quer dizer -1 multiplicado por si mesmo n vezes. Se n for um número par, isso dá 1; se n for um número ímpar, isso dá -1. É uma forma esperta de indicar o sinal do termo, que deve ser alternado. A dedução completa dessa fórmula poderá ser encontrada no Portal.

No kit, o dispositivo traz um sorteio de 7 amigos. Então a chance de dar certo é

$$P_7 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} = \frac{103}{280} = 0,367857 \dots$$

diferindo do valor $1/e$ apenas na quinta casa decimal. Isso quer dizer algo próximo de 37%.

O que há dentro dos chocalhos?

Dentro de cada chocalho do kit há um certo número de bolas coloridas, em duas cores. Agitando-se o chocalho, elas são misturadas. Quando colocado na posição vertical, duas delas podem ser vistas pelas janelinhas do cilindro inferior. O desafio é dizer quantas bolas de cada cor há dentro do chocalho.



Nessa experiência é importante não ter o gabarito. O desafio da estatística (e da ciência, por que não?) é descobrir a “verdade” sem ter acesso direto a ela.

A pergunta mais comum para aquele que pensa um pouco (mas só um pouco!) é se o número de bolas pode ser conhecido ou apenas a proporção entre as quantidades de uma cor e de outra. Por exemplo, é possível distinguir entre um chocalho que tem 4 bolas de cada cor e outro que tem 5 bolas de cada cor? De fato, nos dois chocalhos a chance de se sortear uma bola de uma dada cor é $1/2$. Mas sortear UMA bola seria ter um chocalho com apenas UMA janelinha. Esse chocalho, no entanto, tem DUAS janelinhas.

Digamos que o chocalho tenha n bolas azuis e m bolas vermelhas. Podemos nos perguntar sobre as seguintes probabilidades: P_{AA} - probabilidade de saírem duas bolas azuis; e P_{VV} - probabilidade de saírem duas bolas vermelhas. A probabilidade de saírem bolas de cores diferentes é igual a $1 - P_{AA} - P_{VV}$.

Pensando no sorteio das duas bolas ocorrendo um em seguida do outro, sem reposição, podemos calcular P_{AA} da seguinte forma. A primeira bola tem probabilidade $\frac{n}{n+m}$ de ser azul, pois há n bolas azuis dentro de um total de $n+m$ bolas. Mas quando a segunda bola é sorteada só há $n-1$ bolas azuis num total de $n+m-1$ bolas, portanto a probabilidade de a segunda bola ser azul é $\frac{n-1}{n+m-1}$. Logo

$$P_{AA} = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1}$$

Analogamente,

$$P_{VV} = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1}$$

É um belo exercício mostrar que se $(n, m) \neq (n', m')$ então os respectivos valores de (P_{AA}, P_{VV}) são diferentes. Isso quer dizer que não existem dois chocalhos diferentes que apresentem as mesmas probabilidades (P_{AA}, P_{VV}) .





Este kit introduz ideias básicas sobre probabilidades, explorando experimentos e teoria em conjunto.

EXPERIMENTOS

É essencial realizar os experimentos, mesmo quando trabalhosos. Falar em probabilidade na teoria é diferente de sentir suas sutilezas na prática!

Para quem mora num apartamento, não use o chão para os experimentos, para evitar brigas com vizinhos! Sugerimos usar um tapete de borracha bem dura para lançamentos de dados ou uma mesa com uma toalha plástica.

O Material do Kit

1. 10 dados comuns.
2. 2 dados comuns, maiores, de duas cores diferentes.
3. 1 dado em forma de octaedro numerado de 1 a 8.
4. 1 dado em forma de dodecaedro numerado de 1 a 12.
5. 1 dado em forma de icosaedro numerado de 1 a 20.
6. 2 dados de 10 faces numerados de 0 a 9.
7. 1 dado em forma de cuboctaedro, sem marcações na face.
8. 2 dados em forma de octaedro marcados com 8 pontos cardeais.
9. 1 tabuleiro de papelão quadriculado.
10. 5 folhas de papel milimetrado.
11. 3 dados em forma de cubo com marcações 2-4-9, 1-6-8, 3-5-7.
12. 1 dispositivo chamado "amigo secreto".
13. 3 "chocalhos", contendo, cada um, bolinhas de duas cores, em quantidades não informadas.

EXPERIMENTO 1

Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto?

Objetivo. Saber o que acontece com uma grande série de lançamentos de um dado. Em particular, testar se é verdade que em aproximadamente $\frac{1}{6}$ dos lançamentos sai a face 1 (ou qualquer outra escolhida).



Material. 10 dados comuns e papel milimetrado.

Instruções. - Os lançamentos. A proposta aqui é fazer 1000 lançamentos. Para facilitar, no entanto, utilize um truque: em vez de fazer um lançamento por vez, faça 10 lançamentos em cada rodada, usando 10 dados idênticos. A cada vez que lançar os 10 dados imagine que lançou um único dado 10 vezes. Assim, você só precisará fazer, de fato, 100 lançamentos.

Durante os lançamentos, anote os resultados numa tabela. Depois, com os resultados anotados, faça um gráfico.

Instruções - a tabela. A tabela deve ser montada do seguinte jeito. Ela deve ter 4 colunas e 100 linhas. Cada linha corresponderá a uma rodada de lançamento simultâneo de 10 dados. Conteúdo das colunas:

1ª: indicação das rodadas: 1-10, 11-20, 21-30 etc;

2ª: número de dados que saíram com a face 1 voltada para cima, na rodada correspondente à linha anotada;

3ª: total de vezes que a face 1 saiu desde o começo até a rodada correspondente à linha anotada;

4ª: divisão do valor anotado na terceira coluna pelo número total de lançamentos.

Para ilustrar, exibimos abaixo o que seriam as primeiras linhas dessa tabela, com números fictícios (sim, são fictícios, pois queremos que você experimente e faça uma tabela real!).

Rodada	Faces 1	Total	Fração
1-10	2	2	0,2
11-20	1	3	0,15
21-30	3	6	0,2
31-40	1	7	0,175
41-50	0	7	0,14
51-60	1	8	0,1333
61-70	2	10	0,1429
***	***	***	***

A tabela-exemplo indica 2 ocorrências da face 1 na primeira rodada, 1 ocorrência na segunda rodada, 3 ocorrências na terceira, 1 na quarta, nenhuma na quinta, 1 na sexta e 2 na sétima. Na terceira coluna, o valor acumulado; por exemplo, foram 10 ocorrências da face 1 até a sétima rodada. A quarta coluna é obtida dividindo-se o número da terceira coluna pelo total de dados jogados:

$\frac{2}{10} = 0,2$ na primeira rodada, $\frac{3}{20} = 0,15$ na segunda, $\frac{6}{30} = 0,2$ na terceira, $\frac{7}{40} = 0,175$ na quarta, $\frac{7}{50} = 0,14$ na quinta, $\frac{8}{60}$ na sexta e $\frac{10}{70}$ na sétima.

Essas frações foram arredondadas na quarta casa decimal, que é o que recomendamos fazer por questão de uniformidade, sempre que for necessário. Evidentemente, por uma questão de praticidade, é bom usar uma calculadora.

Instruções - “o gráfico”.

Depois de 100 rodadas você terá um experimento real com 1000 dados jogados. Aí poderá fazer um gráfico dos valores da quarta coluna em função da primeira.

Use um papel milimetrado: tire cópias do papel fornecido ou compre um bloco numa papelaria. Deite o papel e construa o eixo das abscissas (o horizontal). Você deve escolher a escala de acordo com o número de lançamentos e o tamanho do papel. Usando 1mm por rodada, as 1000 rodadas ocuparão 10cm. No exemplo mostrado aqui, usamos uma escala de 2mm, que vai ocupar 20cm. Na ordenada (eixo vertical) seria interessante representar apenas os valores entre 0,1 e 0,2 que aparecem na quarta coluna (se o número estiver fora dessa faixa, simplesmente não coloque o ponto no gráfico). Se usar 10 cm para esse intervalo, então cada centímetro corresponderá a 0,01, e cada mm a 0,001 a olho nu, até 0,0005 é distinguível, sendo cuidadoso.

Os resultados. Agora seria bom refletir sobre os resultados. Se a probabilidade da face 1 é de $\frac{1}{6} = 0,166666\dots$, espera-se que quanto mais jogadas forem feitas mais os valores da quarta coluna se aproximarão desse valor. Isso aconteceu?

Mais tarde você pode precisar dos dados dessa experiência, seria bom que ficassem guardados.



Complemento. O kit traz também outros dados em forma de poliedro, mas todos eles, assim como os dados, têm faces que só podem ser distinguidas com as marcações de números. São eles: o octaedro, sólido platônico com 8 faces triangulares; o dodecaedro, sólido platônico com 12 faces pentagonais; o icosaedro, sólido platônico com 20 faces triangulares; e um decaedro, sólido que não se inclui entre os platônicos, mas que tem 10 faces indistinguíveis entre si. Este último vem numerado de 0 a 9, pois é uma maneira de sortear um dígito. Com dois deles, por exemplo, é possível sortear um número entre 0 e 99.

			
Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro	Decaedro

Você pode refazer o Experimento 1 com esses dados, a seu bel prazer. Divirta-se!

EXPERIMENTO 2

Dá para viciar o lançamento de um dado honesto?

Objetivo. Fazer uma experiência com um dos dados comuns tentando controlar o lançamento para que seja sempre igual. Evidentemente não será exatamente igual, devido às limitações experimentais, mas isso pode ser aperfeiçoado de acordo com as habilidades de cada um. Também não vale fazer um lançamento muito próximo à superfície da mesa, pois isso não terá muita graça (por exemplo, colocando o dado sobre a mesa sempre com a mesma face voltada para cima!).

Material. Um dado simples (maior) e um suporte que você mesmo deve criar para lançar o dado sempre da mesma altura e da mesma posição.

Instruções - lançamentos. A sugestão aqui é, em cada lançamento, colocar o dado num suporte, que terá altura fixa em relação à mesa, sempre na mesma posição (não apenas uma face, mas todas as faces na mesma posição) e empurrá-lo para a queda suavemente, de forma que ele caia apenas pela ação da gravidade. Faça o maior número possível de lançamentos, o quanto aguentar. Esse número, que chamaremos de N , será definido por você.

Instruções - anotações. Anote o resultado de cada lançamento, isto é, anote em cada lançamento a face que saiu para cima. Algo assim:

3, 4, 4, 6, 4, 4, 3, 5, 1, 4, 4,...

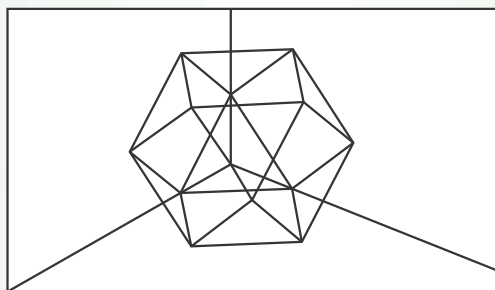
Instruções - análise das anotações. Conte quantas vezes saiu cada uma das faces, e depois divida cada um desses seis números por N .

Resultados. As faces parecem ter igual probabilidade? Ou esses lançamentos parecem ser mais tendenciosos para alguma face?

EXPERIMENTO 3

E quando não temos um palpite sobre a probabilidade das faces? O caso do poliedro com faces diferentes

Objetivo. Neste experimento a ideia é jogar um dado para o qual não temos uma boa hipótese sobre a probabilidade de suas faces. O dado em questão tem a forma de um poliedro chamado cuboctaedro, que pode ser obtido por 8 cortes nos vértices de um cubo (ou por 6 cortes nos vértices de um octaedro). O cuboctaedro tem 6 faces quadradas e 8 faces triangulares (ver figura abaixo).



Material. O cuboctaedro do kit.

Instruções - lançamentos. Lance o cuboctaedro muitas vezes (por exemplo, 1000 vezes), e vá anotando em cada rodada se a face que ficou para cima é um quadrado ou um triângulo. Algo assim:

T, Q, Q, T, Q, T, T, T, Q, Q, T, Q, Q, Q, Q, T, ...

Instruções - análise. Para cada jogada, ou a cada 10 jogadas, tome o número acumulado de vezes que saiu quadrado e divida esse número pelo número total de jogadas até o momento. Faça um gráfico como o do Experimento 1.

Resultados. Diferentemente do dado em forma de cubo, não é razoável supor que, em seu lançamento, todas as faces tenham igual chance de ficarem para cima. Parece razoável apenas supor que todas as faces quadradas tenham iguais chances, e que todas as faces triangulares tenham iguais chances, mas nada parece nos fazer supor que a chance de alguma face triangular específica seja igual à chance de uma quadrada específica.

Se todas as 14 faces (6 quadradas, 8 triangulares) tivessem iguais chances, então a probabilidade de sair uma quadrada seria $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, e a de sair uma triangular seria $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$. Você acha que seus resultados apontam nesse sentido?

Aqui é preciso esclarecer: não existe uma resposta clara para essa pergunta! Ela tem sido, inclusive, debatida em blogs especializados. Neste caso, o importante é ter em mente que nem sempre sabemos com exatidão a probabilidade dos eventos.

EXPERIMENTO 4

O lançamento de dois dados: qual é o modelo correto?

Objetivo 1. Em uma série de lançamentos de dois dados comuns, examinar a proporção entre resultados iguais e resultados diferentes. Essa experiência servirá para decidir sobre a maneira correta de pensar esse experimento, revivendo assim a origem da teoria de probabilidades (ver texto).



Objetivo 2. Na mesma série de lançamentos, computar as somas dos dois dados e ver quais somas são mais frequentes que outras, visualizando esses resultados num gráfico chamado de *histograma*.

Material. Dois dados comuns (dos pequenos).

Instruções - lançamentos. Anote os resultados dos lançamentos de dois dados, com o máximo de jogadas que tiver paciência de fazer. (que tal 1000?) Anote-os um por um, de forma a permitir as análises que serão propostas em seguida.

5 - 2
3 - 3
1 - 5
6 - 1
2 - 2
...

Não é preciso se preocupar com a ordem (5-2 e 2-5 são a mesma coisa), mesmo porque os dados são indistinguíveis e não é clara a ordem em que eles se posicionam sobre a mesa.

Instruções - cômputo dos dados. Dos N lançamentos, conte quantos apresentaram resultados iguais e quantos apresentaram resultados diferentes. Por exemplo, nos cinco lançamentos da tabela acima, foram dois resultados iguais (3-3 e 2-2) e três diferentes (5-2, 1-5 e 6-1).

Análise. A proporção diferentes/iguais é mais próxima de 2,5 ou de 5? Decida qual modelo é melhor para entender lançamentos de dois dados: (i) aquele em que a probabilidade de ocorrer, por exemplo, 2-5 num lançamento é igual à probabilidade de ocorrer 4-4; (ii) aquele em que a primeira probabilidade é o dobro da segunda. (Ver texto)

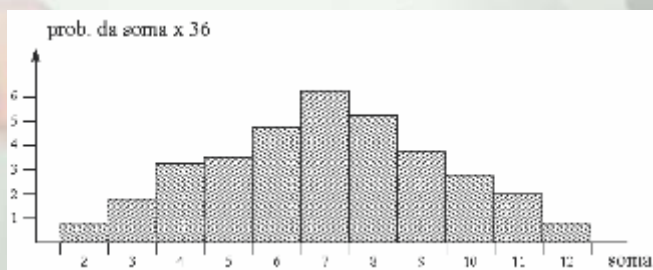
Instruções - histograma. Para cada rodada anotada durante os lançamentos, calcule a soma dos dois dados, como mostrado abaixo com o mesmo exemplo:

5 - 2	7
3 - 3	6
1 - 5	6
6 - 1	7
2 - 2	4
...	...

Depois disso, faça uma outra tabela (desta vez, bem menor) onde na primeira linha vão os números possíveis da soma (de 2 a 12) e na segunda linha quantas vezes cada um desses números apareceu como soma dos lançamentos de dois dados.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Faça uma terceira linha dividindo esses valores pelo número total de lançamentos (para ficar entre 0 e 1) e multiplicando por 36 (para ficar entre 0 e 36). Agora desenhe um histograma dessa tabela. É um diagrama formado por barras, uma para cada número de 2 a 12, de alturas proporcionais aos valores da terceira coluna. Algo assim:



Análise do histograma. Que números você esperava no histograma? Você esperava que ele fosse simétrico? (por exemplo, a altura da barra para soma=2 igual à altura da barra para soma=12, e o mesmo para 3 e 11, 4 e 10 etc?) Qual é a soma mais provável?

EXPERIMENTO 5

Probabilidades numa rodada de 10 jogadas de cara e coroa, honesto e desonesto

Objetivo. Simular grupos de 10 jogadas de cara e coroa e observar a frequência com que ocorrem apenas 10 caras, ou 9 caras e 1 coroa, ou 8 caras e 2 coroas etc. Usando dados em vez de moedas, será possível simular jogos honestos e desonestos de cara e coroa.



Material. 10 dados comuns.

Instruções - lançamentos. A proposta é fazer muitas (que tal 1000?) rodadas de 10 jogadas de cara e coroa e, em cada rodada, anotar quantas vezes saiu cara. Mas a ideia é fazer dois experimentos em um só, usando dados. Portanto, o melhor a fazer é, em cada lançamento, jogar 10 dados e anotar os números que saíram em cada rodada.

Para a análise que será feita depois, é melhor anotar os números em ordem, com repetições. Por exemplo, anotar 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6 significa que saíram: dois dados com o número 1, nenhum com o número 2, dois com o número 3, dois com o número 4, um com o número 5 e três com o número 6.

Rodada	Saída
1	1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6
2	1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6
3	2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6
4	1, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6
5	1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5
...	...

É melhor fazer esse experimento com duas ou três pessoas. Uma para jogar os dados, outra para arrumá-los em ordem crescente e outra para anotar os números. Também é bom revezar os papéis para ninguém se cansar!

Tabela - cara e coroa honesto. Agora acrescente uma coluna a essa tabela, com o nome “honesto/caras”. A convenção no jogo honesto será cara = {1,2,3} e coroa = {4,5,6}. Em cada rodada, conte quantas vezes saiu cara (basta ver quantos dados saíram com números 1, 2 ou 3) e anote nessa coluna.

Rodada	Saída	Honesto/caras
1	1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6	4
2	1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6	4
3	2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6	5
4	1, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6	2
5	1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5	7
...	...	...

Tabela - cara e coroa desonesto. Acrescente mais uma coluna à tabela, com o nome “desonesto/caras”. A convenção neste jogo será cara = {1,2} e coroa = {3,4,5,6}. Isso dá $\frac{1}{3}$ de probabilidade para cara e $\frac{2}{3}$ de probabilidade para coroa. Em cada rodada, conte quantas vezes saiu cara (basta ver quantos dados saíram com números 1 ou 2) e anote nessa coluna.

Rodada	Saída	Honesto/caras	Desonesto/caras
1	1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6	4	2
2	1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6	4	3
3	2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6	5	2
4	1, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6	2	2
5	1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5	7	4
...	...	...	...

Instruções - histograma para cara e coroa honesto.

Com as anotações da coluna “honesto/caras”, conte quantas rodadas tiveram: 0 caras; 1 cara; 2 caras; ...; 10 caras. Anote esses 11 números. Chamaremos esses números de $F_0, F_1, \dots, F_{10}$. Divida cada um desses números por N , que é o número total de rodadas. Esses novos números, que sempre devem estar entre 0 e 1, chamaremos de $f_0, f_1, \dots, f_{10}$.

Agora faça um histograma da seguinte forma: na horizontal indexar as barrinhas de 0 a 10. A altura da barra m será o número f_m calculado acima.

Instruções - histograma para cara e coroa desonesto. Repita o mesmo procedimento agora para a coluna “desonesto/caras”.

Análise Do Resultado. Quando o jogo é honesto, é mais ou menos claro que se esperam mais rodadas equilibradas, com “5 a 5”, “6 a 4”, “4 a 6”, na divisão entre caras e coroas. As rodadas menos equilibradas devem aparecer menos, particularmente essas mencionadas, “0 a 10” e “10 a 0”. Portanto o histograma deve ser mais ou menos parecido com o histograma da soma de dois dados, mais alto no meio e decrescendo nas pontas. Mas será que ele é daquela mesma forma? Como será que poderíamos prever, na teoria, o resultado aproximado desse experimento?

Já no cara e coroa desonesto, o histograma ainda é simétrico? Qual é o número de caras mais provável, numa rodada de 10 lançamentos?

A altura esperada da barra m do histograma é dada por uma fórmula do texto (procure-a!). Use uma calculadora para calcular essas alturas (usando $n = 10$) e desenhadas sobre o histograma obtido experimentalmente.

EXPERIMENTO 6

O passeio (bidimensional) do bêbado

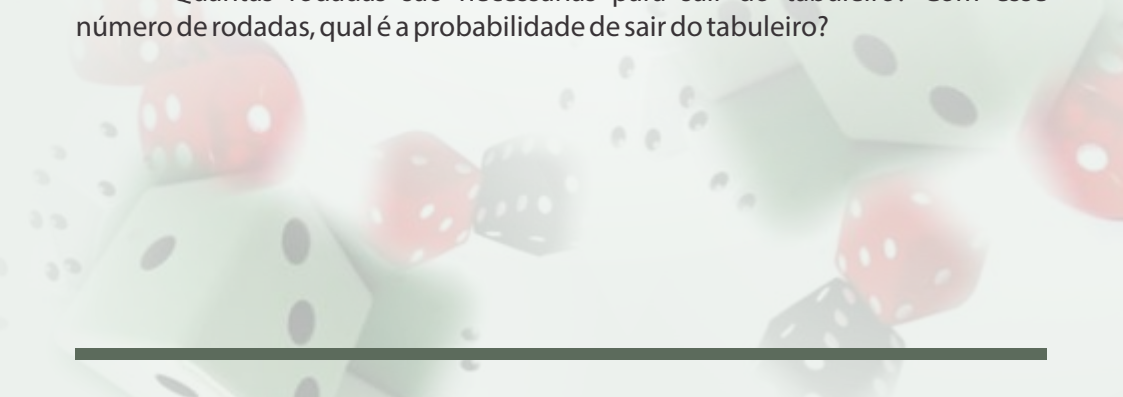
Objetivo. Experimentar o passeio aleatório bidimensional com um jogo entre amigos. As regras são simples, mas fica para cada grupo criar suas próprias regras. O jogo não tem estratégia: o desempenho de cada um é puramente uma questão de sorte, isto é, de probabilidades!

Material. Dados com pontos cardeais e tabuleiro.

Instruções. No kit são fornecidos dados em forma de octaedro com 8 pontos cardeais gravados em suas faces. Cada competidor coloca um pequeno objeto na casa central do tabuleiro e, em cada rodada, sorteia um ponto cardinal que indica a direção para onde seu objeto vai se mover. Estão fora do jogo aqueles que saíram dos limites do tabuleiro. E ganha quem restar por último ou voltar para a casa inicial.

Análise . Para quem quiser pensar um pouco mais, pode começar pelo seguinte problema. De quantas formas diferentes é possível voltar para a casa central em duas rodadas? Qual é a probabilidade de voltar para a casa central em duas rodadas? É possível voltar para a casa central com qualquer número de rodadas? Analise as possibilidades de retorno para 4 jogadas.

Quantas rodadas são necessárias para sair do tabuleiro? Com esse número de rodadas, qual é a probabilidade de sair do tabuleiro?



EXPERIMENTO 7

Qual é a chance de dois números naturais não terem fator comum?

Objetivo. Brincar com pares ordenados de números naturais menores do que 100 e ver quantos têm e quantos não têm fatores comuns.

Material. Dois dados de 10 faces numerados de 0 a 9.

Instruções -tabela. Monte uma tabela de 98 x 98 casas, indicando na horizontal e na vertical cada número entre 2 e 99 junto com sua decomposição em fatores primos.

		2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
		2	3	2^2	5	2×3	7	2^3	3^2	2×5	...
2	2		X		X		X		X		...
3	3	X		X	X		X	X		X	...
4	2^2		X		X		X		X		...
5	5	X	X	X		X	X	X	X		...
6	2×3				X		X				...
7	7	X	X	X	X	X		X	X	X	...
8	2^3		X		X		X		X		...
9	3^2	X		X	X		X	X		X	...
10	2×5		X				X		X		...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Essa tabela ficará bem grande! Sugere-se colar várias folhas de papel ou usar uma cartolina. Cada casinha da tabela representa um par de números. Analise cada par e marque a casinha se os números não tiverem fator primo em comum. Na tabela, para ilustrar, fizemos isso para todos os pares de números possíveis entre 2 e 10.

Depois conte o número de casinhas marcadas e divida por 9604 (que é o número de casas da tabela, 98×98). Essa é a probabilidade de um par ordenado de números naturais entre 2 e 99 não terem fator comum. Para a tabela da ilustração, trabalhamos com 81 pares, sendo que 44 deles são de números primos entre si. Assim, para os pares ordenados envolvendo apenas números de 2 a 10, a probabilidade de um par ordenado ter números sem fator comum é de $44/81 = 0,54\dots$, ou seja, um pouco mais do que a metade.

Instruções - sorteios. Dizemos que dois números naturais maiores do que 1 são coprimos se não tiverem fator comum. Um par (ordenado ou não) de dois números sem fator comum é chamado de par coprimo.

Como na segunda parte do Experimento 1, você pode usar os dados numerados de 0 a 9 para sortear pares de números. Para sortear um número de 0 a 99, jogue dois dados desses, mas defina antes qual dos dados vai definir o dígito da dezena e qual vai definir o dígito da unidade.

Fazendo a jogada de novo, você obterá o segundo número. Se der 00 ou 01, para algum dos números, anule a jogada.

Faça muitas rodadas, anotando, e veja a frequência de pares coprimos em seus lançamentos.

Análise. A frequência calculada em seus lançamentos se aproximou da probabilidade teórica, que você calculou pela tabela? E a probabilidade dada pela tabela está próxima do valor $\frac{6}{\pi^2} = 0,607927101\dots$? (este é o valor para o qual esse tipo de probabilidade se aproxima quando os números considerados crescem indefinidamente).

EXPERIMENTO 8

Qual é a chance de dois colegas de turma fazerem aniversário no mesmo dia?

Objetivo. Numa turma de pouco mais de 20 alunos, é pequena a chance de que um colega faça aniversário no mesmo dia que você faz. Mas não é tão pequena a chance de que dois colegas façam aniversário no mesmo dia. Estranho, não? Mas é assim...

Material. Um dado de 10 faces e dois dados simples (os maiores) em duas cores.

Instruções - investigação na escola. Se as turmas de sua escola tiverem em torno de 25 alunos ou mais, peça ajuda na escola e investigue quantas têm pelo menos duas pessoas fazendo aniversário no mesmo dia. Divida o número de turmas em que existem dois alunos com aniversário na mesma data pelo número de turmas pesquisadas. Deu mais ou menos do que a metade? Deu próximo da metade?

Instruções - experimento com dados. Dá para fazer um experimento mais controlado usando dados, com um calendário mais ou menos semelhante ao nosso. Pegue 1 dado de 10 faces e mais dois dados comuns (de 6 faces cada um), com cores diferentes. Agora um jogo desses 3 dados é uma tripla (χ_1, χ_2, χ_3) em que χ_1 é a saída do dado de 10 faces, que pode ser um número de 0 a 9, χ_2 é a saída do dado comum de uma das cores, que pode ser um número de 1 a 6, e χ_3 é a saída do outro dado comum, da outra cor, também um número de 1 a 6. Há $10 \times 6 \times 6 = 360$ possibilidades de triplas, e podemos pensar que cada uma delas representa um dia do ano. Ok, o ano não tem 360 dias, mas 365 é relativamente muito próximo disso. Nesse ano esquisito de 360 dias, podemos pensar que o primeiro número representa o mês (é um ano de 10 meses, numerados de 0 a 9), o segundo número representa uma semana (cada mês teria 6 semanas) e o terceiro número representa o dia da semana (cada semana teria 6 dias). Você pode imaginar que está em outro planeta!

Agora faça rodadas de 23 lançamentos desses 3 dados, anotando os resultados. Isto equivale a tomar 23 pessoas ao acaso e perguntar uma por vez suas datas de aniversário. Dá trabalho, mas tente fazer isso muitas vezes. Qual é a frequência de rodadas em que aparecem duas datas repetidas?

Variações. A experiência pode ser feita de modo a se aproveitar melhor os resultados para analisar tamanhos de turmas diferentes. Primeiro obtenha uma longa série de lançamentos com os três dados, digamos 1000. Depois divida essa série em grupos de N lançamentos, onde N vai ser o tamanho de turma que você quer analisar. Por exemplo, na instrução anterior, seria $N = 23$. Mas você pode tomar

$N = 30$, $N = 40$, $N = 50$. Em turmas de 50 pessoas, é comum ter duas aniversariando no mesmo dia?

EXPERIMENTO 9

Dados não transitivos

Objetivo. Testar as propriedades inusitadas dos dados não transitivos na prática.

Material. Os 3 dados com 3 números em cada.

Instruções. São 3 dados, chamados de **A** (com números 2, 4 e 9), **B** (com números 1, 6 e 8) e **C** (com números 3, 5 e 7). Na competição entre dois quaisquer deles, em que ganha uma rodada aquele que sair com o número mais alto, um tem probabilidade $\frac{5}{9}$ de vencer, enquanto o outro tem apenas probabilidade $\frac{4}{9}$. Entre dois dados desses, diz-se que aquele que tem mais probabilidade de vencer ganha do outro. Aqui, **A** ganha de **B**, **B** ganha de **C**, e **C** ganha de **A**.

Com um grupo de amigos, faça rodadas usando esses 3 dados, do seguinte jeito. Deixe um de seus amigos escolher um dado e, em função do dado que ele escolheu, escolha um dado melhor (você terá que treinar para se lembrar rapidamente de qual escolha fazer).

Jogue com ele(s) e anote os resultados. Se você fizer isso muitas vezes, deverá ganhar 5 de cada 9 jogadas, aproximadamente.

EXPERIMENTO 10

As probabilidades por trás de um sorteio de amigo secreto

Objetivo. Testar as probabilidades envolvidas num sorteio de amigo secreto com o dispositivo disponível no kit. Um sorteio de amigo secreto é uma permutação de seus participantes.

material. O dispositivo “amigo secreto”.

Instruções - sorteios. Faça muitos “sorteios” do amigo secreto com o dispositivo disponível no kit. Anote:

(A) o número total de sorteios;

(B) o número de sorteios que deram certo; um sorteio dá certo se ninguém tira a si mesmo, o que no aparato quer dizer que nenhuma bolinha volta para a casa de sua mesma cor;

(C) o número de sorteios em que aparece um único ciclo; pensando no momento da entrega dos presentes, um único ciclo ocorre quando o primeiro a dar presente é também o último a receber.

Resultados. Divida os números obtidos em (B) e (C) pelo número obtido em (A). De acordo com a teoria, o primeiro número deveria estar próximo de 0,36, e o segundo deveria estar perto de $\frac{1}{7} = 0,14\dots$. O que aconteceu?

EXPERIMENTO 11

O que há dentro dos chocalhos?

Objetivo. Perceber que a probabilidade e a estatística servem para inferir a 'verdade' quando não se tem acesso direto a ela. O único jeito de saber quantas bolas de cada cor existem dentro dos chocalhos é experimentando e anotando, já que os chocalhos não podem ser abertos.

Material. Os 3 "chocalhos".

Instruções - experimento. Escolha um dos chocalhos. Sacuda-o e anote as cores das bolinhas que aparecem nas janelinhas. Faça isso muitas vezes e depois conte a proporção de vezes em que apareceram duas bolinhas de uma cor, duas bolinhas de outra cor e duas bolinhas de cores diferentes.

Instruções - investigação. A ideia aqui é usar suas informações para descobrir quantas bolas de cada cor estão dentro de cada chocalho. É preferível que você tente fazer sem a ajuda do texto, usando seus próprios conhecimentos, mas caso queira damos algumas dicas abaixo.

Uma sugestão é montar uma tabela com as possibilidades (dentro do que é razoável caber no chocalho) e suas probabilidades, de acordo com o que está discutido no texto. Admite-se primeiro que só há duas cores de bolinhas em cada chocalho: quem duvidar, pode experimentar muitas e muitas vezes e ver que nunca aparece uma terceira cor. Chamemos de azul e vermelho as cores das bolinhas, mesmo que elas sejam de outras duas cores. No texto, deduz-se a probabilidade P_{AA} de saírem duas bolinhas azuis e a probabilidade P_{VV} de saírem duas bolinhas vermelhas.

Monte uma tabela onde na vertical estão indicadas as possibilidades para o número de bolas azuis e na horizontal as possibilidades para o número de bolas vermelhas.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	X	X	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
1	X	(0,0)						
2	(1,0)							
3	(1,0)							
4	(1,0)							
5	(1,0)							
6	(1,0)							
7	(1,0)							

Agora, usando as fórmulas mostradas no texto, preencha cada casa da tabela com o par (P_{VV}, P_{AA}) correspondente ao número n de bolas azuis (indicado pelo número da linha) e m bolas vermelhas (indicado pelo número da coluna). Na tabela mostrada, já excluimos (marcando com um X) os casos em que (n, m) é igual a $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$, porque não chegam nem a ter 2 bolas no total. O caso $(n, m) = (1, 1)$ sempre mostrará uma bola de cada cor, portanto a probabilidade de saírem duas bolas da mesma cor é zero (por isso $(0,0)$ é colocado nessa casa). O caso $(n, m) = (n, 0)$ $n \geq 2$ também é simples: com n bolas azuis e nenhuma vermelha, a probabilidade de saírem duas bolas azuis é 1 e a probabilidade de saírem duas vermelhas é zero; analogamente para o caso $(n, m) = (0, m)$, com $m \geq 2$.

Agora peguemos um caso menos simples, para exemplificar. Digamos $n=6$ e $m=3$. As fórmulas dão:

$$P_{AA} = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} = \frac{6}{6+3} \cdot \frac{6-1}{6+3-1} = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$$

Analogamente,

$$P_{VV} = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} = \frac{3}{6+3} \cdot \frac{3-1}{6+3-1} = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

Então deve-se preencher a casa $(n, m) = (6, 3)$ com o par de probabilidades $(\frac{5}{12}, \frac{1}{12})$. Atenção: não é preciso que essas probabilidades somem 1 porque há ainda a chance de que saiam bolas de cores diferentes. A probabilidade de saírem bolas de cores diferentes é igual a $1 - P_{AA} - P_{VV}$.

Agora analise seus experimentos. Você pode obter f_{AA} como o número de vezes que saíram duas bolas azuis, dividido pelo número total de tentativas. E pode obter f_{VV} como o número de vezes que saíram duas bolas vermelhas, dividido pelo número total de tentativas. Esse par (f_{AA}, f_{VV}) que é o resultado de seu experimento, deveria estar próximo de algum dos pares (P_{AA}, P_{VV}) da tabela. Qual?







O Projeto dos Kits “AVENTURAS NA CIÊNCIA”

Este projeto foi desenvolvido por uma equipe de cientistas, como contribuição para o aperfeiçoamento da educação em ciências no Brasil. Foi projetado com foco em jovens entre os 12 e 17 anos. Ele visa a suprir a carência de equipamentos de laboratório e práticas experimentais em nossas escolas. Tem como objetivos recuperar a curiosidade inata dos jovens, seu interesse pela compreensão da natureza e do mundo em que vivemos, estimulando a criatividade e a paixão pela descoberta, promovendo uma iniciação na grande aventura da ciência.

É absolutamente essencial que você possa levar o kit para a sua casa, a fim de realizar os experimentos propostos – por gosto, não por obrigação. Tome para isso o tempo que for necessário, que variará conforme o experimento. Como acontece com um cientista em seu laboratório, nem sempre o experimento dará certo. Procure e teime em descobrir sozinho e consertar o que falhou – é assim que mais se aprende.

Você poderá compartilhar suas experiências com a família e com amigos. Também poderá levar os kits para a escola e discuti-los com colegas e com professores. Se tiver acesso à internet, encontrará muitos materiais suplementares, inclusive vídeos de experimentos, no portal www.aventurasnaciencia.ifsc.usp.br

Boas vindas ao mundo da ciência!

EQUIPE DE CIENTISTAS RESPONSÁVEIS POR ESTE PROJETO



MOYSÉS NUSSENZEIG
FÍSICO - UFRJ



BEATRIZ BARBUY
FÍSICA - USP



MAYANA ZATZ
BIÓLOGA - USP



ELIANA DESSEM
BIÓLOGA - USP



VANDERLEI BAGNATO
FÍSICO - USP



HENRIQUE TOMA
QUÍMICO - USP



EDUARDO COLLI
MATEMÁTICO - USP



CARLOS H. DE BRITO CRUZ
FÍSICO - UNICAMP



UFRJ



Universidade Federal
do Rio Janeiro



UNICAMP

